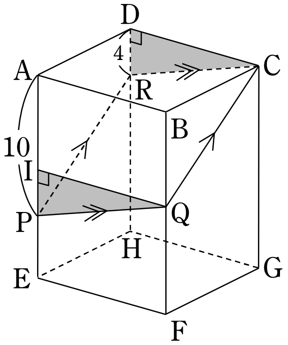
中2数学C 2019年度2学期 宿題解答
§8 立体の切断

H8.1

(1)



直方体の向かい合う面は平行なので、平面 PRC との交線は平行になる。よって、$CR \parallel QP, CQ \parallel RP$ なので、

CRPQ は平行四辺形……………………① である。

Q から AE に下ろした垂線の足を I とすると、3 つの内角が $90°$ になるので、

ABQI は長方形……………………② である。△DCR と△IQP において、

$\angle CDR = \angle QIP = 90°$

$CR = QP$ (①より)

$CD = QI\ (= BA)$ (②より)

だから、斜辺一辺相等で

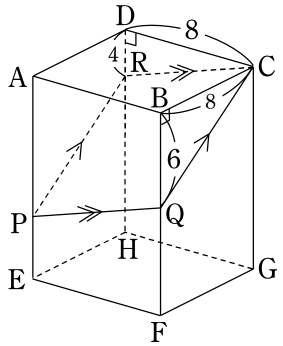
$\triangle DCR \equiv \triangle IQP$ ……………………③

となる。

よって、

$$\begin{aligned} BQ &= AI && (②より) \\ &= AP - IP \\ &= AP - DR && (③より) \\ &= 10 - 4 = \boxed{6} \end{aligned}$$

(2)



△CDR にピタゴラスの定理を用いて、

$$CR = \sqrt{CD^2 + DR^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

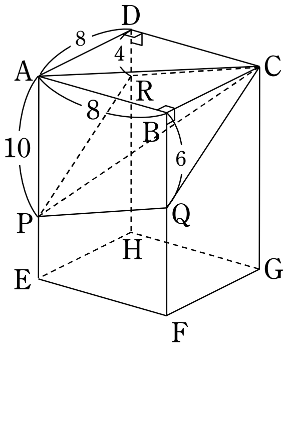
(1)より $BQ = 6$ なので、△CBQ にピタゴラスの定理を用いて、

$$CQ = \sqrt{BC^2 + BQ^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

①より、PQCR は平行四辺形なので、その周の長さは、

$$\begin{aligned} 2 \times CR + 2 \times CQ &= 2 \times 4\sqrt{5} + 2 \times 10 \\ &= \boxed{8\sqrt{5} + 20} \end{aligned}$$

(3) 直方体全体から、六面体 ABCD-PQCR を除いたものとして計算しよう。



この六面体は、2 つの四角錐 C-APRD と C-APQB に分割することができる。

直方体の辺 CD が面 AEHD と垂直なことから、C-APRD の APRD を底面としたときの高さは CD であり、CB が面 AEFB と垂直なことから、C-APQB の APQB を

底面としたときの高さは CB になっている。

よって、

[C-APRDの体積]

$$=\frac{1}{3}\times[\text{APRDの面積}]\times \text{CD}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\text{AP}+\text{DR})\times\text{AD}\times\text{CD}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(10+4)\times8\times8=\frac{448}{3}$$

[C-APQBの体積]

$$=\frac{1}{3}\times[\text{APQBの面積}]\times \text{CB}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\text{AP}+\text{BQ})\times\text{AB}\times\text{CB}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(10+6)\times8\times8=\frac{512}{3}$$

よって、

[ABCD-PQCRの体積]

=[C-APRDの体積]+[C-APQBの体積]

$$=\frac{448}{3}+\frac{512}{3}=\frac{960}{3}=320$$

求める六面体 PQCR-EFGH の体積は

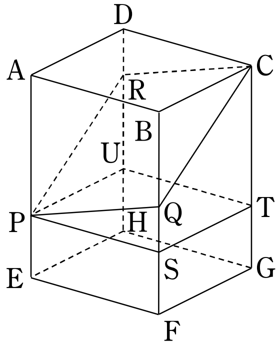
[PQCR-EFGHの体積]

=[ABCD-EFGHの体積]

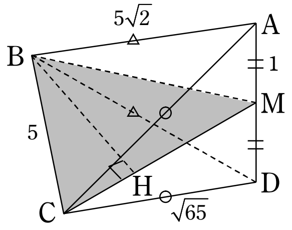
−[ABCD-PQCRの体積]

$$=8\times8\times14-320=\boxed{576}$$

※ P を通り ABCD に平行な平面と BF, CG, DH との交点をそれぞれS, T, U とおくと、六面体 ABCD-PQCR と TUPS-CRPQ は鏡像な立体になっており、体積は等しくなる。このことを利用して体積を計算することもできる。



H8.2



AD の中点を M とすると、

BA=BD より AD⊥BM,

CA=CD より AD⊥CM

なので、BM∦CM にも注意して、

AD⊥面 MBC ……………………………… ①

である。B から CM へ下ろした垂線の足を H とすると、CM⊥BH かつ、①より、AD⊥BH だから、CM∦AD にも注意して、BH⊥面 ACD である。よって、△ACD を底面と見れば、高さは BH である。

ここで、△BCM の三辺の長さは、まず、

$BC=5$

CA=CD より、CM⊥AD だから、△ACM にピタゴラスの定理を用いて、

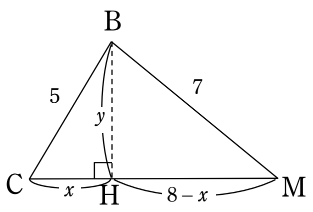
$$CM=\sqrt{AC^2-AM^2}=\sqrt{\left(\sqrt{65}\right)^2-1^2}=8$$

BA=BD より、BM⊥AD だから、△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

$$MB=\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2-1^2}=7$$

である。

$CH=x, BH=y$ とおく。



△BCH にピタゴラスの定理を用いて、

$x^2+y^2=5^2$ ……………………………… ②

△BMH にピタゴラスの定理を用いて、

$(8-x)^2+y^2=7^2$ ……………………………… ③

②−③ より、

$$x^2-(8-x)^2=25-49$$

$$x^2-(64-16x+x^2)=-24$$

$$\cancel{x^2}+16x\cancel{-x^2}=-24+64$$

$$x=\frac{40}{16}=\frac{5}{2}$$

なので、②より

$$y^2=25-\left(\frac{5}{2}\right)^2=25\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{25\times3}{4}$$

$$\therefore BH=y=\frac{5\sqrt{3}}{2}\ (>0)$$

ここで、

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times AD\times CM=\frac{1}{2}\times2\times8=8$$

以上より、ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle ACD\times BH$$

$$=\frac{1}{3}\times8\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{20\sqrt{3}}{3}}$$

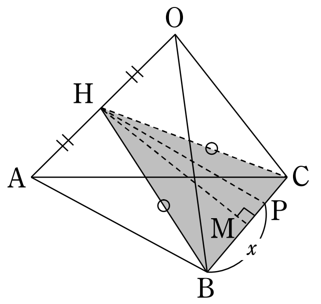
※ AD⊥BM, AD⊥CM より、AD⊥面 BMC である。このことから、ABCD を 2 つの四面体 ABCM, DBCM に分割し、△BMC を底面、AM, DM を高さと見て体積を計算することもできる。

H8.3

(1) △OBP≡△ABP（二辺夾角相等）なので、△POA は $OP=AP$ の二等辺三角形であり、垂線 PH の足 H は OA の中点である。すると、BH および CH は 1 辺の長さ 1 の正三角形の高さなので、

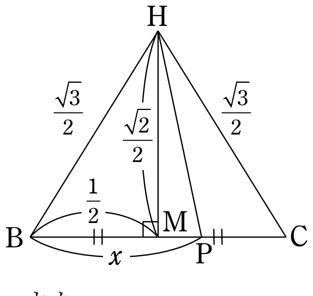
$$BH=CH=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。PH の長さを△HBC に注目して計算しよう。



BC の中点を M とおくと、HM は二等辺三角形 HBC の高さなので、

$$\mathrm{HM}=\sqrt{\mathrm{BH}^2-\mathrm{BM}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



また、

$$\mathrm{PM}=|\mathrm{BP}-\mathrm{BM}|=\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

なので、△PHM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{MH}^2+\mathrm{MP}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left|x-\frac{1}{2}\right|^2}$$
$$=\boxed{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}}$$

（この結果は、P と M が一致していて、P, H, M が三角形の頂点にならない場合にも正しい式となっている。）

(2)　△OAP の面積は、

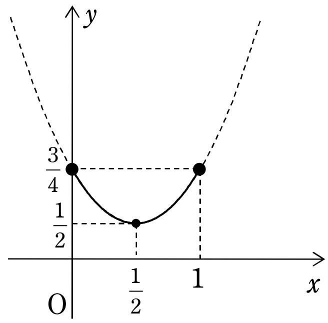
$$\frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{PH}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$
$$=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}}$$

(3)　(2)で求めた面積が最小になるのは、

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

が最小になるときである。

この関数のグラフは、頂点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$の下に凸な放物線で、以下のようになっている。



$x=\mathrm{BP}$ の範囲は $0\leqq x\leqq 1$ だから、この関数の最小値は、$x=\frac{1}{2}$ のときの $\frac{1}{2}$ である。

このとき、△OAP の面積は、最小値

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

をとる。

※　△OAP の面積が最小になるのは、△OAP の高さ PH が最小になるときである。
H は P の位置によらず、常に OA の中点なので、△HBC は P の位置に関係なく決まる。したがって、△HBC の頂点 H と、辺 BC 上の点 P をつないだ線分 PH が最小になるのは、P が H から BC に下ろした垂線の足になっているときとわかる。