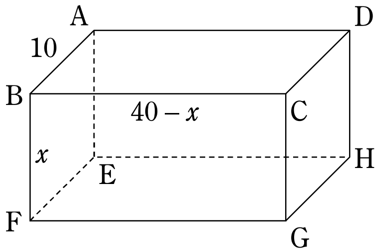
中2数学C 2019年度2学期 宿題解答
§7 面対称性と平面への垂線

H7.1

$BC + BF = 40$ なので、$x = BF$ の取りうる範囲は

$0 < x < 40$ ………………………………………… ①

である。



(1) $V = AB \times BC \times BF = 10 \times (40 - x) \times x$

$= \boxed{400x - 10x^2}\ (\mathrm{cm}^3)$ …………………… ②

(2) V が $3000\,\mathrm{cm}^3$ 以上になるのは

$400x - 10x^2 \geqq 3000$

$0 \geqq 10x^2 - 400x + 3000$

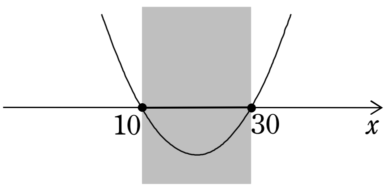
$\therefore x^2 - 40x + 300 \leqq 0$ ……………………… ③

のときである。③の解は、2 次関数

$y = x^2 - 40x + 300$

$= (x - 10)(x - 30)$

のグラフ（x 切片が $10, 30$ で、下に凸な放物線）で、y 座標が 0 以下となるような x 座標の範囲である。



それは、図より

$10 \leqq x \leqq 30$

であるが、これは①を満たすので、求める x の範囲は $\boxed{10 \leqq x \leqq 30}$

H7.2

BC の中点を M とする。

OB=OC より $OM \perp BC$,

AB=AC より $AM \perp BC$

だから、$OM \nparallel AM$（OM と AM は平行でない）にも注意して、

平面OAM $\perp BC$ ………………………………… ①

平面 OAM 内で O から AM に下ろした垂線の足を H とする:

$OH \perp AM$ ………………………………………… ②

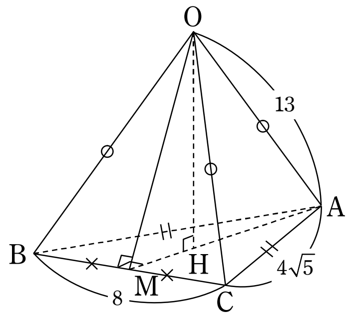
OH は平面 OAM 内にあるから、①より、

$OH \perp BC$ ……………………………………………… ③

②, ③より、$AM \nparallel BC$ にも注意して、

$OH \perp$ 平面ABC

であり、△ABC を底面と見ると、OH がこの四面体の高さとなる。

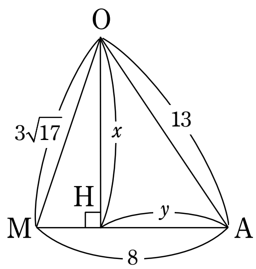


△OBM にピタゴラスの定理を用いて、

$$OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = \sqrt{13^2 - 4^2} = 3\sqrt{17}$$

△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 - 4^2} = 8$$



$OH = x, AH = y$ とおく。

$\triangle$OAH にピタゴラスの定理を用いて、

$x^2 + y^2 = 13^2$ ……………………… ④

$\triangle$OMH にピタゴラスの定理を用いて、

$x^2 + (8-y)^2 = \left(3\sqrt{17}\right)^2$ ……………… ⑤

④－⑤ より

$$y^2 - (8-y)^2 = 13^2 - \left(3\sqrt{17}\right)^2$$

$$y^2 - (64 - 16y + y^2) = 169 - 153$$

$$y^2 - 64 + 16y - y^2 = 16$$

$$16y = 80$$

$\therefore\ y = 5$

④に代入して

$x^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \quad \therefore\ x = 12\ (>0)$

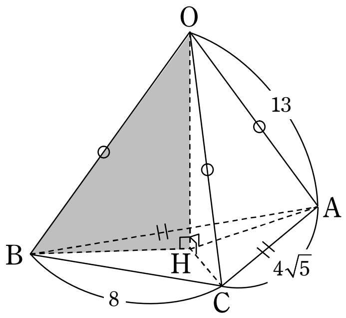
よって、四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AM}\right)\times\mathrm{OH}$$

$$= \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 8\times 8\right)\times 12$$

$$= \boxed{128}$$

別解



O から面 ABC に下した垂線の足を H とすると、

$\angle\mathrm{OHA} = \angle\mathrm{OHB} = \angle\mathrm{OHC} = 90°$

$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}\ (=13)$

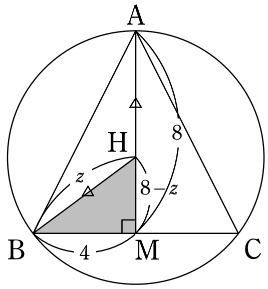
$\mathrm{OH} = \mathrm{OH} = \mathrm{OH}$ （共通）

なので、直角三角形の斜辺一辺相等で、

$\triangle\mathrm{OHA} \equiv \triangle\mathrm{OHB} \equiv \triangle\mathrm{OHC}$

$\therefore\ \mathrm{HA} = \mathrm{HB} = \mathrm{HC}$ （対応辺）

が成り立ち、H は$\triangle$ABC の外心である。



したがって、H は辺 BC の垂直二等分線上の点であって、HA＝HB を満たす点に他ならない。辺 BC の中点を M とすると、$\triangle$ABC は AB＝AC の二等辺三角形だから、中線 AM は A から BC への垂線と一致する。よって、直線 AM が辺 BC の垂直二等分線であり、H は AM 上の点であることが分かる。

$\triangle$ABM でピタゴラスの定理を用いて、

$\mathrm{AM} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BM}^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 - 4^2} = 8$

よって、 $\mathrm{HA} = \mathrm{HB} = z$ とおくと、

$\mathrm{HM} = \mathrm{AM} - \mathrm{HA} = 8 - z$

であり、$\triangle$BHM にピタゴラスの定理を用いて、

$4^2 + (8-z)^2 = z^2$

これを解くと、

$16 + 64 - 16z + z^2 = z^2 \quad 80 = 16z \quad \therefore\ z = 5$

したがって、$\triangle$OBH にピタゴラスの定理を用いて、

$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 - \mathrm{HB}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

以上より、四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AM}\right)\times\mathrm{OH}$$

$$= \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 8\times 8\right)\times 12$$

$$= \boxed{128}$$

H7.3

AB, CD の中点をそれぞれ M, N とおく。
△OAB は OA=OB の二等辺三角形だから、中線 OM は O から AB への垂線と一致し、

$AB \perp OM$ ……………… ①

ABCD は長方形だから、

$AB \perp MN$ ……………… ②

①, ②より、OM∦MN にも注意して、

$AB \perp$ 平面OMN ……………… ③

である。平面 OMN 内で O から MN に下ろした垂線の足を H とする：

$MN \perp OH$ ……………… ④

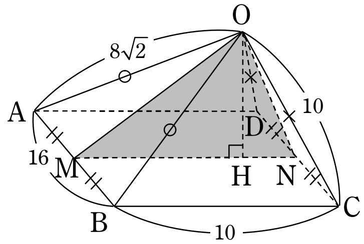
OH は平面 OMN 内にあるから、③より、

$AB \perp OH$ ……………… ⑤

④, ⑤より、MN∥AB にも注意して、

平面$ABCD \perp OH$

であり、底面 ABCD に対し OH がこの四角錐の高さである。



△OAM にピタゴラスの定理を用いて、

$$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2-8^2}=8$$

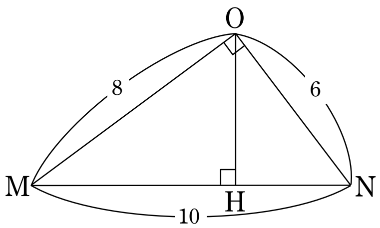
OC=OD より $CD \perp ON$ だから、△OCN にピタゴラスの定理を用いて、

$$ON=\sqrt{OC^2-CN^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$$

いま、

$$OM^2+ON^2=8^2+6^2=100=10^2=MN^2$$

が成り立っているので、ピタゴラスの定理の逆より、△OMN は$\angle MON=90^\circ$ の直角三角形である。



△OMN の面積、あるいは△OMN∽△HON に着目して、

$$MN \times OH = OM \times ON$$
$$10 \times OH = 8 \times 6$$

$$\therefore OH=\frac{24}{5}$$

よって、O-ABCD の体積は、

$$\frac{1}{3}\times ABCD \times OH=\frac{1}{3}\times(BC\times AB)\times OH$$
$$=\frac{1}{3}\times(10\times 16)\times\frac{24}{5}$$
$$=\boxed{256}$$