中2数学C 2019年度2学期 本問解答
§12 正多面体2

※ 欠席してしまった場合は、問 12.1 を自分で確認してください。
さらに、チャレンジ問題の中から興味のあるものに取り組んでみよう。

問12.1

(1) 対角線 AP, BC の交点を R とおく。
△ABP, △BPQ, △PQC, △QCA, △CAB は二辺夾角相等で合同なので、対応する辺は等しく、対角線 AP, BQ, PC, QA, CB の長さはすべて等しい。
正五角形の一つの内角の大きさは

$$\frac{180^\circ\times 3}{5}=108^\circ$$

で、正五角形の 1 つの頂点とその両隣の頂点を結ぶ二等辺三角形の底角の大きさは

$$\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$$

となる。すると、△ABC と△RBA はどちらも底角が 36° の二等辺三角形であるから、二角相等で

$$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{RBA}\ \cdots\cdots①$$

が成り立つ。よって、対応辺の比を考えて、

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{RB}:\mathrm{BA}\ \cdots\cdots②$$

ここで、

$$\angle\mathrm{CAR}=\angle\mathrm{CAB}-\angle\mathrm{RAB}$$
$$=108^\circ-36^\circ=72^\circ,$$
$$\angle\mathrm{CRA}=\angle\mathrm{RAB}+\angle\mathrm{RBA}$$
(△ABRに外角定理)
$$=36^\circ+36^\circ=72^\circ$$

だから、△CAR は CR=CA (=2) の二等辺三角形である。よって、求める対角線の長さ BC を x とおくと、

$$\mathrm{RB}=\mathrm{CB}-\mathrm{CR}=x-2$$

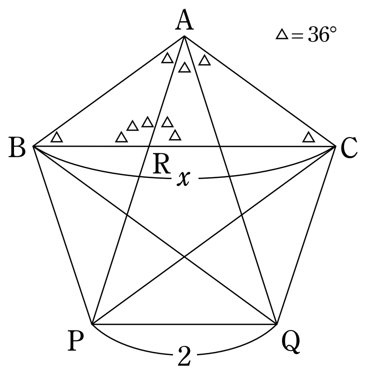
となるから、②より、

$$2:x=(x-2):2$$
$$x(x-2)=4$$
$$\therefore x^2-2x-4=0\ \cdots\cdots③$$

を得る。これを解くと、

$$x^2-2x+1=5$$
$$(x-1)^2=5$$
$$x-1=\pm\sqrt{5}$$
$$\therefore x=1\pm\sqrt{5}$$

$x>0$ だから、求める対角線の長さは
$\mathrm{BC}=x=\boxed{1+\sqrt{5}}$ である。

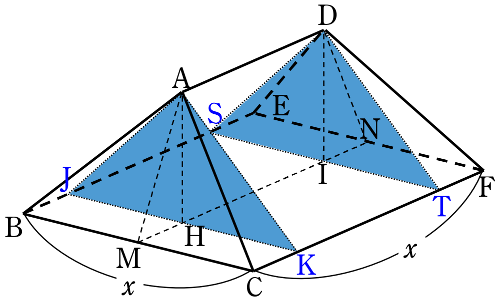


以下では、$x=1+\sqrt{5}$ が、③つまり、

$$x^2=2x+4\ \cdots\cdots④$$

をみたす正の値であることを利用していく。

(2)



BC の中点を M、EF の中点を N とする。A, D から MN に下ろした垂線の足をそれぞれ H, I とおく。さらに H を通り、BC と平行な直線と BE, CF の交点をそれぞれ J, K とし、I を通り、BC と平行な直線と BE, CF の交点をそれぞれ S, T とする。五面体 ADEBCF を 2 つの錐体 A-BCKJ, D-EFTS と三角柱 AJK-DST に分割して体積を計算しよう。

まず、AH, DI が面 BCFE と垂直であること、および AMND が等脚台形であることを示しておく。
△ABC は AB=AC の二等辺三角形で、M は BC の中点なので、

$\mathrm{AM} \perp \mathrm{BC}$ ……………………………… ⑤

BCFE は 1 辺 x の正方形で、M, N はそれぞれ BC, FE の中点だから、中点連結定理より、

$\mathrm{BE} \,/\!/\, \mathrm{MN}$ ……………………………… ⑥

$\mathrm{MN} \perp \mathrm{BC}$ ……………………………… ⑦

$\mathrm{AM} \nparallel \mathrm{MN}$ だから、⑤, ⑦より、

面 $\mathrm{AMN} \perp \mathrm{BC}$ ……………………… ⑧

⑧より、

$\mathrm{AH} \perp \mathrm{BC}$ ……………………………… ⑨

また、H は A から MN に下した垂線の足だから、

$\mathrm{AH} \perp \mathrm{MN}$ ……………………………… ⑩

$\mathrm{BC} \nparallel \mathrm{MN}$ だから、⑨, ⑩より、

$\mathrm{AH} \perp$ 面 BCFE ……………………… ⑪

まったく同様に、

$\mathrm{DI} \perp$ 面 BCFE ……………………… ⑫

も示される。
△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BM}^2 = 2^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 - \frac{x^2}{4} \quad \cdots\cdots ⑬$$

同様に、

$$\mathrm{DN}^2 = \mathrm{DE}^2 - \mathrm{EN}^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$$

だから AM=DN である。また、AD // BE と⑥より、AD // MN だから（A, M, N, D は同一平面上にあり）、

AMND は AD // MN の等脚台形‥⑭

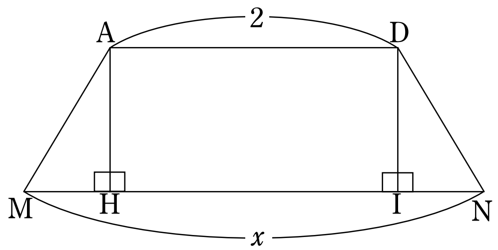
になる。

次に、AJK-DST が三角柱である根拠も示しておく。⑭より、MH=NI, AD=HI だから、

$\mathrm{BJ} = \mathrm{MH} = \mathrm{NI} = \mathrm{ES}, \quad \therefore \mathrm{BJ} = \mathrm{ES},$

$\mathrm{JS} = \mathrm{HI} = \mathrm{AD}, \quad \therefore \mathrm{JS} = \mathrm{AD}$

したがって、ABED が等脚台形であることと合わせると、AJSD が長方形であることが分かる。同様に考えれば、AKTD も長方形。また、JKTS も長方形だから、AJK-DST は三角柱である。（例えば、$\mathrm{AD} \perp \mathrm{AJ}$, $\mathrm{AD} \perp \mathrm{AK}$ より $\mathrm{AD} \perp$ 面 AJK であることに注意しよう。）



さて、⑭より、

$$MH=NI, \qquad HI=AD=2,$$

$$\therefore MH=NI=\frac{1}{2}(MN-HI)$$

$$=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$=\frac{1}{2}x-1$$

これと⑬より、△AMH にピタゴラスの定理を用いて、

$$AH^2=AM^2-MH^2$$

$$=4-\frac{x^2}{4}-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$$

$$=4-\frac{x^2}{4}-\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)$$

$$=3+x-\frac{1}{2}x^2$$

$$=3+x-(x+2) \quad (\because ④)$$

$$=1$$

$$\therefore AH=1$$

である。よって、⑪より、A-BCKJ の体積は、

$$\frac{1}{3}\times(BC\times BJ)\times AH$$

$$=\frac{1}{3}\times x\times\left(\frac{1}{2}x-1\right)\times 1$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)$$

$$=\frac{1}{3}(x+2-x) \quad (\because ④)$$

$$=\frac{2}{3}$$

D-EFTS の体積もこれと同じ。また、三角柱 AJK-DST の体積は、

$$\left(\frac{1}{2}\times JK\times AH\right)\times JS$$

$$=\frac{1}{2}\times x\times 1\times 2$$

$$=x$$

以上より、五面体 ADEBCF の体積は、

$$2\times\frac{2}{3}+x=\frac{4}{3}+1+\sqrt{5}$$

$$=\boxed{\frac{7}{3}+\sqrt{5}}$$

(3) 1 辺 2 の正十二面体は、1 辺 x の立方体に(2)の ADEBCF と合同な五面体を 6 つ張り付けたものである。よって、(2)で求めた体積を V とすると、求める体積は、

$$x^3+6V$$

と表せる。ここで、④を繰り返し使うと、

$$x^3=x^2\times x$$

$$=(2x+4)\times x$$

$$=2x^2+4x$$

$$=2(2x+4)+4x$$

$$=8(x+1)$$

$$=8\left(2+\sqrt{5}\right)$$

$$=16+8\sqrt{5}$$

であるから、

$$x^3+6V=16+8\sqrt{5}+6\left(\frac{7}{3}+\sqrt{5}\right)$$

$$=\boxed{30+14\sqrt{5}}$$