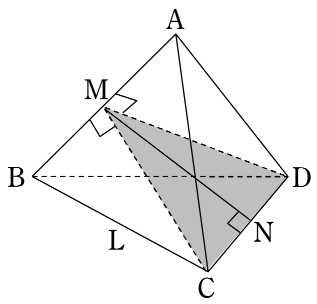
中2数学C 2019年度2学期 本問解答
§11　正多面体1

※　欠席してしまった場合は、問 11.2～問 11.4 を（余裕があれば問 11.1, 問 11.5 も）自分で確認し、p.35 の宿題 H11.1～H11.3 に取り組んで提出してください。

問11.1

(1)



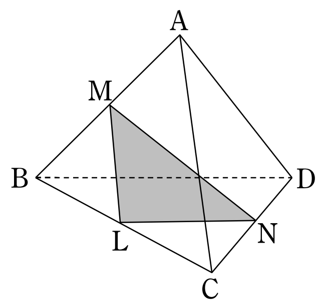
△ACM にピタゴラスの定理を用いて、

$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

同様に、$DM = \sqrt{3}$ で CM=DM だから、△MCD において、M から CD への中線 MN は M から CD への垂線と一致する。よって、△CMN にピタゴラスの定理を用いて

$$MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \boxed{\sqrt{2}}$$

(2)



△ABC において、M は AB の中点で ML // AC だから、中点連結定理より、L は BC の中点で、

$$ML = \frac{1}{2}AC = 1$$

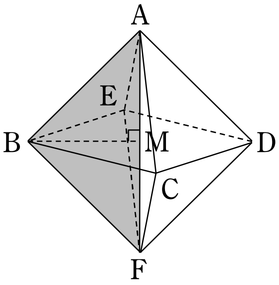
△BCD において、L, N はそれぞれ CB, CD の中点だから、再び中点連結定理より、

$$LN = \frac{1}{2}BD = 1$$

ゆえに、(1)の結果も合わせると、△LMN は，3 辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ であるから、LM=LN の直角二等辺三角形である。したがって、

$$\angle LMN = \boxed{45^\circ}$$

問11.2



(1) △ABF は BA＝BF の二等辺三角形だから、B から AF への中線 BM は B から AF への垂線と一致し、

$BM \perp AF$

これより、BM は（よって B は)、M を通り AF に垂直な平面 α に含まれる。
まったく同様にして、C, D, E も α 上の点であることが言えるので、B, C, D, E は同一平面 α 上に存在する。

(2) まず、B, C, D, E は同一平面上にあって、四角形の頂点をなしていることに注意する。

$BC = CD = DE = EB$

なので、

BCDE はひし形…………………………… ①

である。
ここで、三辺相等で

△ABF ≡ △ACF ≡ △ADF ≡ △AEF

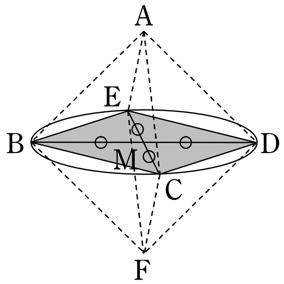
であるが、これら合同な二等辺三角形において、B, C, D, E から AF への中線は等しく、

$BM = CM = DM = EM$

したがって、M を中心として B を通る円を描けば、B, C, D, E はこの円周上にあり、

BCDE は円に内接する………………… ②

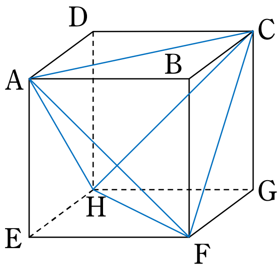
ことが分かる。



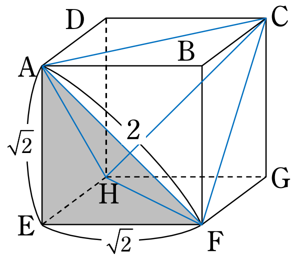
四角形 BCDE において、
①より、∠B＝∠D ………………………… ③
（平行四辺形の向かい合う角は等しい）
②より、∠B＋∠D＝180° ……………… ④
（内接四角形の定理）
③, ④より ∠B＝90° となるので、これと①より、BCDE は一つの内角が 90° のひし形、つまり正方形である。

問11.3

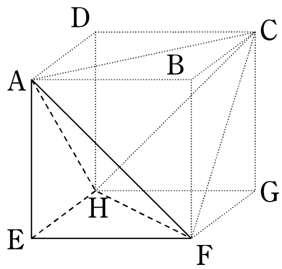
(1) 下図のように切断すれば、ACFH は、すべての面が正三角形なので、正四面体である。



(2) 立方体 ABCD-EFGH の面の対角線が、正四面体 ACFH の辺になるので、正四面体の辺の長さが 2 になるのは、立方体の 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ のときである。



正四面体 ACFH は、立方体 ABCD-EFGH から、AEFH と合同な 4 つの四面体を取り除いたものである。



取り除いている四面体の体積は

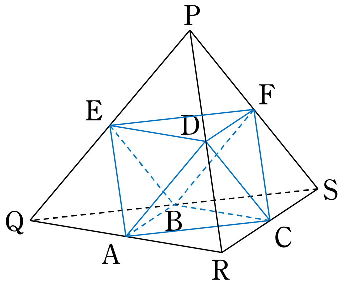
$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

なので、正四面体 ACFH の体積は、

$$\left(\sqrt{2}\right)^3-4\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

問11.4

(1) PQRS の各辺の中点を図のようにA, B, C, D, E, F とし、八面体ABCDEF を考える。



すると、この八面体の各辺の長さは、中点連結定理より、PQRS の各辺の長さの半分になっており、すべて等しい。したがって、ABCDEF はすべての面が合同な正三角形となっているような八面体、すなわち正八面体である。

(2) (1)の正四面体 PQRS の 1 辺の長さを 2 とすると、正八面体 ABCDEF の 1 辺の長さは 1 となる。

PQRS の体積を a とおくと、これを $\dfrac{1}{2}$ 倍に相似縮小した、1 辺の長さ 1 の正四面体の体積 V は、(底面が $\dfrac{1}{2}$ 倍の相似縮小なので面積は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ 倍であり、高さも $\dfrac{1}{2}$ 倍なので)

$$V=\frac{a}{8}$$

となる。

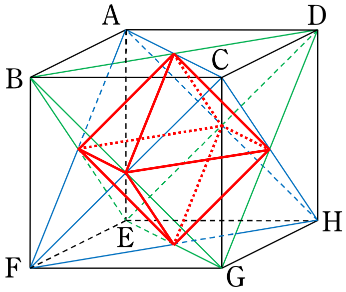
1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF は、PQRS から、1 辺の長さが 1 の正四面体 PDFE, QAEB, RACD, SBFC を除いたものなので、ABCDEF の体積 W は

$$W=a-4\times\frac{a}{8}=\frac{a}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots ☆$$

となる。

よって、$V:W=\dfrac{a}{8}:\dfrac{a}{2}=\boxed{1:4}$

問11.5



共通部分は、ACFH の各辺の中点（立方体の各面の対角線の交点）をつないだ正八面体になる。問 11.4 の☆より、この正八面体の体積は、A-CFH の体積の$\frac{1}{2}$倍である。

一方、正四面体 ACFH は、問 11.3 で見たように、立方体から、ABCF と合同な三角錐を 4 つ取り除いたものなので、体積は

$$1^3 - 4 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 \right) = \frac{1}{3}$$

よって、共通部分の体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$