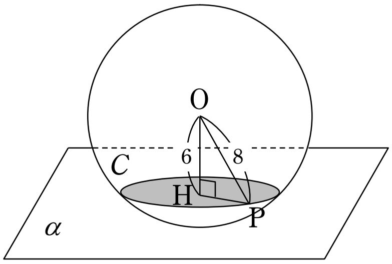
中2数学C 2019年度2学期 本問解答
§10 球

※ 欠席してしまった場合は、問 10.1, 問 10.2 を（余裕があれば問 10.3 も）自分で確認し、p.31 の宿題 H10.1, H10.2 に取り組んで提出してください。

問10.1



C 上に点 P を取ると、ピタゴラスの定理より

$$\mathrm{HP}=\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$$

が成り立つので、C は H を中心とする半径 $2\sqrt{7}$ の円である。よって、切り口の面積は

$$\pi\times(2\sqrt{7})^2=\boxed{28\pi}$$

※ 上記の解答は、実質テキスト p.28 の定理(1)の証明になっている。

問10.2

解 1 まず、対称性から点 I と点 O が一致することを示しておこう。

A から面 BCD へ下ろした垂線の足を H とする。

AB = AC = AD ………………………………… ①

だから、

△AHB≡△AHC≡△AHD

（斜辺一辺相等）

と分かる。対応辺を考えて

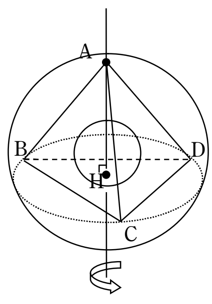
BH=CH=DH

だから、H は△BCD の外心である。

△BCD は正三角形 ……………………………… ②

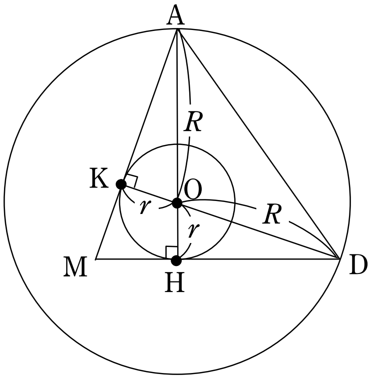
なので（各辺の垂直二等分線が向い合う頂点を通ることから）、H は△BCD の重心とも一致する。

AH を軸として ABCD を 120° 回転させると ①, ②より、ABCD は（回転前の）自分自身と重なる。よって、内接球 I と外接球 O も、この回転によってそれぞれ自分自身に重なり、その中心である点 I, 点 O が直線 AH 上にあることが分かる。



D から面 ABC へ下ろした垂線の足を K とすると、まったく同様に、点 I, 点 O が直線 DK 上にあることが分かる。ゆえに、点 I, 点 O はともに AH, DK の交点であり、一致する。

次に、BC の中点を M とし、A, M, D を通る平面による断面を考える。H, K は、△BCD, △ABC の重心になるから、それぞれ中線 DM, AM 上にある。したがって、AH, DK は(よって、点 I=点 O は)、この面 AMD 上にあり、断面図は次のようになる。
（$h = \mathrm{AH}$, $R = \mathrm{OA} = \mathrm{OD}$, $r = \mathrm{OH} = \mathrm{OK}$ である。）



△AOK と△AMH において、

$\angle\mathrm{OAK} = \angle\mathrm{MAH}$ （共通）

$\angle\mathrm{AKO} = \angle\mathrm{AHM}\ (= 90^\circ)$

だから、

$\triangle\mathrm{AOK} \backsim \triangle\mathrm{AMH}$ (二角相等)

よって、対応辺の比を考え、

$\mathrm{AO} : \mathrm{OK} = \mathrm{AM} : \mathrm{MH}$ ……………………………③

ここで、AM, DM は合同な正三角形△ABC, △BCD の高さだから、

AM＝DM

また、H は△BCD の重心だから、

$\mathrm{DM} : \mathrm{HM} = 3 : 1$

ゆえに、③より、

$$R : r = \mathrm{AO} : \mathrm{OK} = \mathrm{DM} : \mathrm{HM} = 3 : 1 \quad \text{……………………④}$$

である。

$h = \mathrm{AH} = \mathrm{AO} + \mathrm{OH} = R + r$

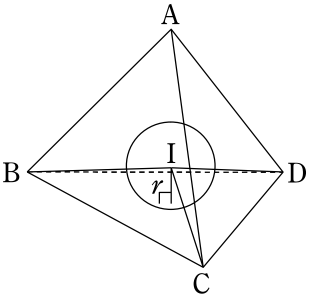
だから、④より、

$$r = \frac{1}{4}h, \quad R = \frac{3}{4}h$$

つまり、r は h の $\boxed{\frac{1}{4}}$ 倍、R は h の $\boxed{\frac{3}{4}}$ 倍である。

$\boxed{解2}$　断面図を考えずに、体積と表面積を利用した、次のような解決方法もある。点Iと点Oが一致することを利用せず、独立に考えることにする。

内接球の半径r



点Iから△BCDに下ろした垂線の長さは内接球の半径rとなっており、四面体I-BCDの体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times r$$

である。I-ABC, I-ACD, I-ADB, I-BCDは合同な四面体で体積は等しく、A-BCDをこれらの四面体に分割して考えると、A-BCDの体積は

$$4\times\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times r \cdots\cdots ①$$

と表せる。
一方、A-BCDの体積は、高さhを用いて

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times h \cdots\cdots ②$$

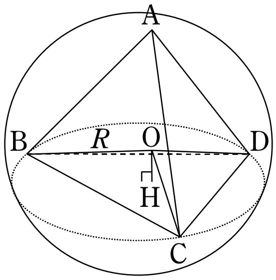
と表せるので、①, ②より、

$$4\times\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times r=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times h$$

$$\therefore r=\frac{1}{4}h$$

で、rはhの$\boxed{\frac{1}{4}}$倍である。

外接球の半径R



解1で示したように、AB＝AC＝ADより、Aから面BCDに下した垂線の足は△BCDの外心Hと一致する。四面体O-BCDはOB＝OC＝ODの等稜四面体だから、まったく同様に、Oから面BCDに下した垂線の足は△BCDの外心Hとなっていることが分かる。したがって、O-BCDの面BCDを底面としたときの高さはOHになり、O-BCDの体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times\mathrm{OH} \cdots\cdots ③$$

である。
O-ABC, O-ACD, O-ADB, O-BCDは合同な四面体で体積は等しく、A-BCDはこれらの四面体に分割できるので、O-BCDの体積はA-BCDの体積②の$\frac{1}{4}$である。よって、③より

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times\mathrm{OH}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times h$$

$$\therefore \mathrm{OH}=\frac{1}{4}h$$

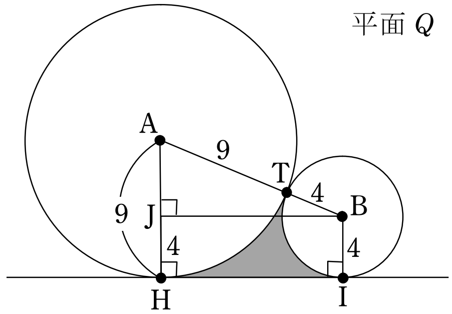
である。
最初に述べたことから、A, Oはともに外心Hを通る面BCDの垂線上にある。したがって、

$$R=\mathrm{AO}=\mathrm{AH}-\mathrm{OH}=h-\frac{1}{4}h=\frac{3}{4}h$$

で、Rはhの$\boxed{\frac{3}{4}}$倍である。

問10.3

(1) AH, BI はともに平面 P に垂直であるから、同一平面上にある。その平面を Q とすると、2 つの球の接点 T は線分 AB 上にあるから、やはり Q 上にある。



点 B から AH に下ろした垂線の足を J とすると、BJHI は長方形で、

$$\mathrm{AJ} = \mathrm{AH} - \mathrm{JH} = \mathrm{AH} - \mathrm{BI} = 9 - 4 = 5$$

また、

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AT} + \mathrm{BT} = 9 + 4 = 13$$

だから、三角形 ABJ にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{BJ}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AJ}^2 = 169 - 25 = 144,$$

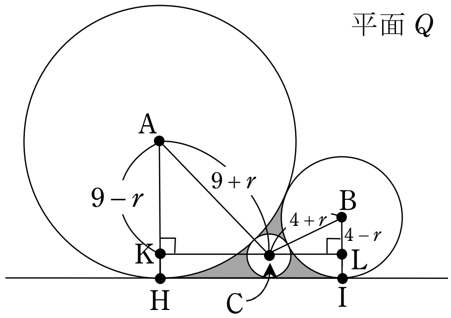
$$\therefore \mathrm{BJ} = \sqrt{144} = 12 (> 0)$$

したがって、

$$\mathrm{HI} = \mathrm{BJ} = \boxed{12}$$

(2) 球 A, B と平面 P が作る隙間を通り抜けることが出来る球は、「隙間」の平面 Q による断面（(1)の図の網掛け部分）も当然通り抜けることが出来る。逆に、「隙間」の Q による断面にその大円（球をその中心をとおる平面で切った断面の円）が収まるような球は、その状態から、Q に対し垂直な方向に動かすことによって、球 A, B と平面 P の間を通り抜けさせることができる。なぜなら、Q と平行な平面による断面を考えると、球 A, B の断面は、(1)の図と中心が一致し半径がより小さい円になり、(1)の網掛け部分より「隙間」の断面が大きくなるからである。

したがって、球 A, B と平面 P の間を通り抜けることができる半径最大の球とは、平面 Q 上で球 A, B と平面 P に接する球である。それを球 C とし、その半径を r とおく。



点 C から AH, BI に下ろした垂線の足をそれぞれ K, L とする。(1)と同様に考えると、

$$\mathrm{AC} = 9 + r, \quad \mathrm{AK} = 9 - r$$

であるから、三角形 ACK にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} \mathrm{KC}^2 &= \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AK}^2 \\ &= (9 + r)^2 - (9 - r)^2 \\ &= 4 \cdot 9 \cdot r = 36r, \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{KC} = 6\sqrt{r} \ (> 0)$$

同様に、三角形 BCL にピタゴラスの定理を用いて、

$$\begin{aligned} \mathrm{LC}^2 &= \mathrm{BC}^2 - \mathrm{BL}^2 \\ &= (4 + r)^2 - (4 - r)^2 \\ &= 4 \cdot 4 \cdot r = 16r, \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{LC} = 4\sqrt{r} \ (> 0)$$

$\mathrm{LC} + \mathrm{KC} = \mathrm{LK} = \mathrm{HI}$ だから、

$$6\sqrt{r} + 4\sqrt{r} = 12$$

$$10\sqrt{r} = 12$$

$$\sqrt{r} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore r = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{36}{25}}$$

であり、これが求める値である。