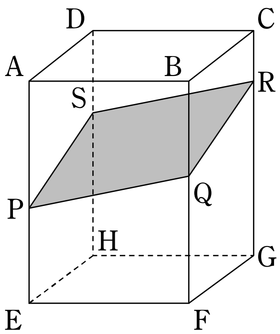
中2数学C 2019年度2学期 本問解答
§8 立体の切断

※ 欠席してしまった場合は、問 8.1～問 8.3 を（余裕があれば問 8.4 も）自分で確認し、p.20～p.21 の宿題 H8.1～H8.3 に取り組んで提出してください。

問8.1



面 ABFE と DCGH は平行な平面なので交わらない。よって、面 ABFE に含まれる直線 PQ と面 DHGC に含まれる直線 SR も交わらない。この２直線は同一平面（切断面）上にあるので、交わらないということは平行である。

PQ // SR

同様に、面 AEHD と BFGC が平行な平面であることから、

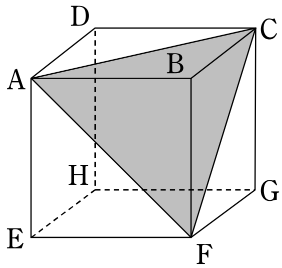
PS // QR

したがって、PQRS は平行四辺形である。

※ この事実は、今後証明せずに利用することにする。

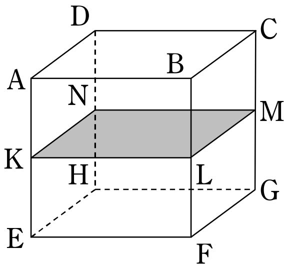
問8.2

(i) △ACF は正三角形である。



［理由］三辺が等しいから。

(ii) AE, BF, CG, DH の中点を K, L, M, N とすると、KLMN は正方形である。



［理由］
直感的には「当たり前」であるが、証明しておく。
四角形 AKLB は長方形になるので、

AB // KL ……………………………………… ①

AB = KL ……………………………………… ②

①と同様に、

DC // NM …………………………………… ③

なので、①, ③, AB // DC より

KL // NM

とわかる。したがって、

K, L, M, N は同一平面上にある。……④

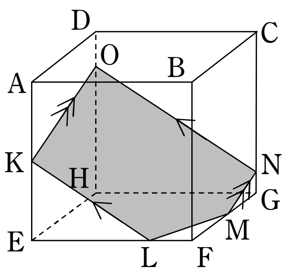
②と同様に、

LM = BC, MN = CD, NK = DA

であるから、$AB=BC=CD=DA$ より
$KL=LM=MN=NK$
よって、④と合わせて、
KLMN はひし形………………………………… ⑤
である。
さらに、$AB\perp$ 面 BFGC なので、これと①より
$KL\perp$ 面 BFGC
$\therefore \angle KLM=90^\circ$ ……………………………………… ⑥
⑤, ⑥より、KLMN は一つの内角が 90° のひし形なので正方形である。

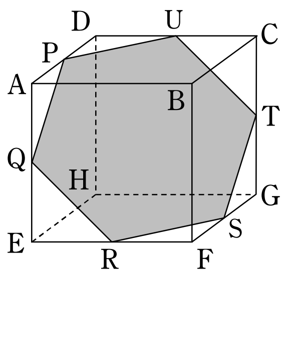
(iii) 正五角形が切り口に現れることはない。

［理由］
切り口に現れる多角形の辺は、立方体の面と、切断する平面との交わりである。立方体は、向かい合う 3 組の面が平行であるような 6 面からなるので、このうちの 5 つの面を選ぶと、2 組の平行な平面が含まれる。したがって、切り口に現れる五角形には、2 組の平行な辺がある。



一方、正五角形の辺は、どの二つも平行ではないので、これが切り口に現れることはない。

(iv) DA, AE, EF, FG, GC, CD の中点を P, Q, R, S, T, U とすると、六角形 PQRSTU は正六角形である。



［理由］
長くなるので、細部は省略する。

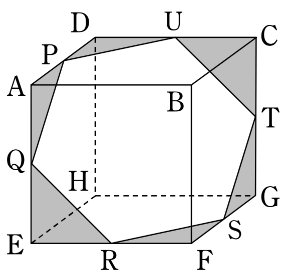
P, Q, R, S, T, U が同一平面上にあること

(1) PQ // DE // UR なので、P, Q, U, R は同一平面上にある。
(2) QR // AF // PS なので、Q, R, S, P は同一平面上にある。
(3) RS // EG // QT なので、R, S, T, Q は同一平面上にある。

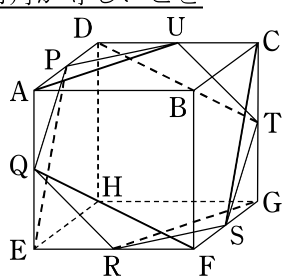
(1), (2)より、平面 PQR は U と S を含み、P, Q, R, U, S は同一平面上にあることが分かり、(3)よりこの平面は T も含む。よって、P, Q, R, S, T, U は同一平面上にある。
あとは、この六角形 PQRSTU が正六角形であること、つまり、すべての辺の長さが等しく、すべての内角の大きさが等しいことを確認しよう。

すべての辺が等しいこと

△APQ, △EQR, △FRS, △GST, △CTU および△DUP は二辺夾角相等で合同な三角形と分かるので、対応辺を考えて
$PQ=QR=RS=ST=TU=UP$ …………… ①



すべての内角が等しいこと



△PAE, △QEF, △RFG, △SGC, △TCD および△UDA は二辺夾角相等で合同な三角形と

分かるので、対応辺を考えて、

$PE = QF = RG = SC = TD = UA$

このことと

$ER = FS = GT = CU = DP = AQ$

$\angle PER = \angle QFS = \angle RGT$

$= \angle SCU = \angle TDP = \angle UAQ = 90°$

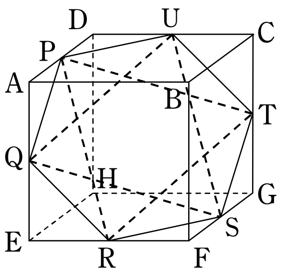
より、二辺夾角相等で△PER, △QFS, △RGT, △SCU, △TDP および△UAQ は合同で、対応辺を考えて、

$PR = QS = RT = SU = TP = UQ$ ………… ②

①,②から、△PQR, △QRS, △RST, △STU, △TUP および△UPQ は三辺相等で合同となり、対応角を考えて、

$\angle PQR = \angle QRS = \angle RST$

$= \angle STU = \angle TUP = \angle UPQ$



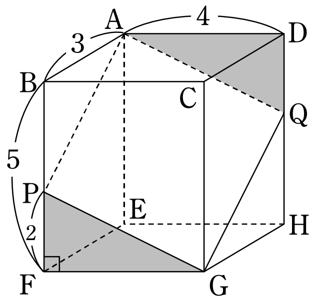
以上より、PQRSTU は正六角形である。

(v)　正七角形が切り口に現れることはない。

［理由］

切り口に現れる多角形の辺は、立方体の面と、切断する平面との交わりである。立方体は、6 面しかないので、切り口の多角形には最大でも 6 つの辺しかない。したがって、そもそも七角形の切り口が現れることはない。

問8.3



<u>DQ の長さ</u>

△ADQ と△GFP において、

$AD = GF$ ……………………………………… ①

APGQ は平行四辺形なので

$AQ = GP$ ……………………………………… ②

また

$\angle ADQ = \angle GFP = 90°$ ………………………… ③

①, ②, ③より、斜辺一辺相等で

$\triangle ADQ \equiv \triangle GFP$

よって、対応辺を考えて、

$DQ = FP = 2$

(1)　<u>周の長さ</u>

APGQ は平行四辺形なので、向かい合う辺の長さは等しく、周の長さは

$AP + PG + GQ + QA = 2(AP + PG)$

として計算できる。

△ABP は直角二等辺三角形であるから、

$AP = \sqrt{2}AB = 3\sqrt{2}$

△PFG にピタゴラスの定理を用いて、

$PG = \sqrt{PF^2 + FG^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

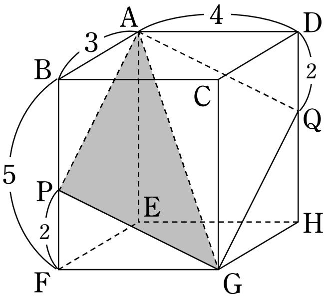
よって、周の長さは

$2(AP + PG)$

$= 2\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\right) = \boxed{6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}}$

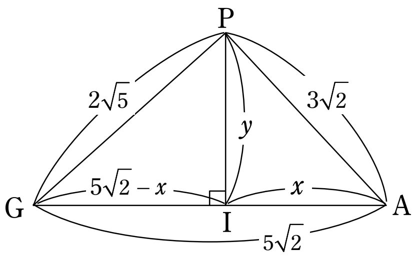
<u>面積</u>

APGQ は平行四辺形なので、その面積は△APG の 2 倍である。△APG について、AP , PG の長さは分かっているので、残りの一辺である AG の長さが分かれば、例えば P から AG へ下ろした垂線の長さが計算できる。



AG は直方体 ABCD-EFGH の対角線だから、問 6.1 と同様に計算できる。
AE ⊥ 面 EFGH より、∠AEG = 90° だから、△AEG にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{AG} = \sqrt{\mathrm{AE}^2 + \mathrm{EG}^2}$$
$$= \sqrt{\mathrm{AE}^2 + (\mathrm{EF}^2 + \mathrm{FG}^2)}$$
（△EFGにピタゴラスの定理）
$$= \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = 5\sqrt{2}$$



P から AG へ下ろした垂線の足を I とし、$\mathrm{AI} = x, \mathrm{PI} = y$ とおく。
△API にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2 + y^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

△GPI にピタゴラスの定理を用いて、

$$\left(5\sqrt{2} - x\right)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④ − ⑤ より

$$x^2 - \left(5\sqrt{2} - x\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2$$
$$x^2 - \left(50 - 10\sqrt{2}x + x^2\right) = 18 - 20$$
$$x^2 - 50 + 10\sqrt{2}x - x^2 = -2$$
$$10\sqrt{2}x = 48$$
$$x = \frac{\overset{24}{\cancel{48}}}{{}_{5}\cancel{10}\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$$

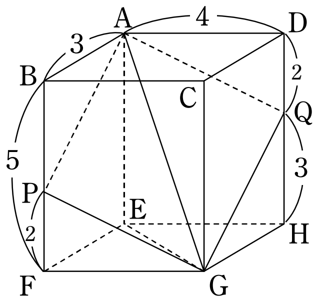
④に代入して

$$y^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)^2$$
$$= 18 - \frac{288}{25} = \frac{162}{25}$$
$$\therefore\ y = \frac{9\sqrt{2}}{5}\ (> 0)$$

したがって、APGQ の面積は

$$2\triangle\mathrm{APG} = \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \mathrm{AG} \times \mathrm{PI}$$
$$= 5\sqrt{2} \times \frac{9\sqrt{2}}{5} = \boxed{18}$$

(2) 六面体 APGQ-EFGH を、2 つの四角錐 G-APFE と G-AQHE に分割して考える。



直方体の辺 GF が面 ABFE と垂直なことから、G-APFE の APFE を底面としたときの高さは GF であり、GH が面 AEHD と垂直なことから、G-AQHE の AQHE を底面としたときの高さは GH になっている。
よって、

[G-APFEの体積]
$$= \frac{1}{3} \times [\text{APFEの面積}] \times \mathrm{GF}$$
$$= \frac{1}{3} \times \left\{\frac{1}{2} \times (\mathrm{PF} + \mathrm{AE}) \times \mathrm{FE}\right\} \times \mathrm{GF}$$
$$= \frac{1}{3} \times \left\{\frac{1}{2} \times (2 + 5) \times 3\right\} \times 4 = 14$$

［G-AEHQの体積］

$$=\frac{1}{3}\times[\text{AEHQの面積}]\times GH$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(AE+QH)\times EH\right\}\times GH$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(5+3)\times 4\right\}\times 3=16$$

以上より、

［APGQ-EFGHの体積］

$$=[\text{G-APFEの体積}]+[\text{G-AEHQの体積}]$$

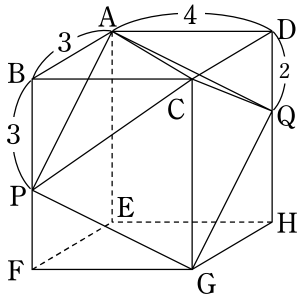
$$=14+16=\boxed{30}$$

※ APGQ-EFGH と GQAP-CDAB は鏡像の位置におくことができ、体積は等しい。このことに気付けば、その体積を、直方体 ABCD-EFGH の半分として

$$\frac{3\times4\times5}{2}=30$$

と計算できる。

(3) 求める垂線の長さは、四角錐 C-APGQ の、APGQ を底面としたときの高さである。四角錐 C-APGQ は六面体 GQAP-CDAB から、三角錐 C-ABP と C-ADQ を除いたものであることに注目しよう。



<u>GQAP-CDAB の体積</u>

GQAP-CDABは直方体ABCD-EFGHから(2)で体積を計算した APGQ-EFGH を除いたものなので、体積は

$$3\times4\times5-30=30$$

<u>C-ABP の体積</u>

$\triangle$ABP を底面としたときの高さが CB なので、

$$\frac{1}{3}\times\triangle ABP\times CB=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times3\right)\times4=6$$

<u>C-ADQ の体積</u>

$\triangle$ADQ を底面としたときの高さが CD なので、

$$\frac{1}{3}\times\triangle ADQ\times CD=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times2\right)\times3=4$$

よって、C-APGQ の体積は

$$30-6-4=20$$

C から平面 APGQ へ下ろした垂線の長さを h とおくと、C-APGQ の体積に注目して

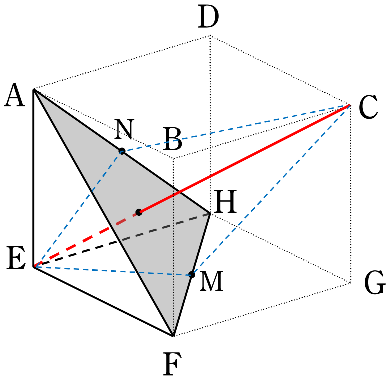
$$\frac{1}{3}\times[\text{APGQの面積}]\times h=20$$

なので、(1)より

$$\frac{1}{3}\times18\times h=20\qquad\therefore h=\boxed{\frac{10}{3}}$$

問8.4

(1)



FH, AH の中点をそれぞれ M, N とする。
△EFH において、

EF=EH, FM=HM より、EM⊥FH

△CFH において、

CF=CH, FM=HM より、CM⊥FH

したがって、EM∥CM にも注意して、

面 ECM⊥FH

だから、

EC⊥FH……………………………………①

同様に、面 ECN⊥AH で、

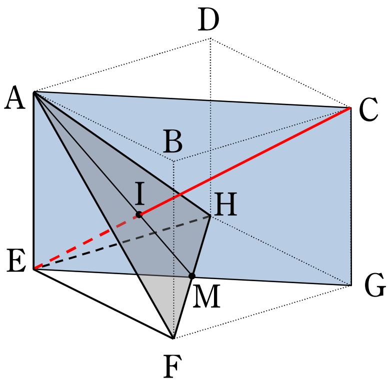
EC⊥AH……………………………………②

が分かる。①, ②より、FH∥AH にも注意して、

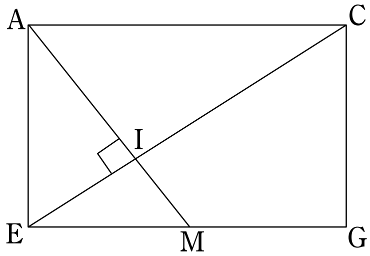
EC⊥面 AFH……………………………③

が示された。

(2)



EC と面 AFH の交点を I とする。(1)より、$h=\mathrm{EI}$ である。
面 ECM による断面を考えよう。AE, CG は、ともに面 ABCD に垂直だから AE // CG であり、A, E, G, C は同一平面上にある。また、EFGH は正方形だから M は EG の中点でもあり、面 ECM は面 AEGC と一致することに注意する。



AE // CG に加え、AE=CG, AE⊥AC であるから、AEGC は長方形である。ゆえに、

AC // EG

であり、平行線と比の定理より、

$$\begin{aligned}\mathrm{EI}:\mathrm{IC}&=\mathrm{EM}:\mathrm{AC}\\&=\mathrm{EM}:\mathrm{EG}\\&=1:2\end{aligned}$$

したがって、$h=\mathrm{EI}$ は EC の $\boxed{\frac{1}{3}\text{倍}}$ である。

※ EC⊥FH だけ先に確認し、面 AEGC 内で CE⊥AM を確認（例えば△AEM∽△CAE から）することで、EC⊥面 AFH を示すことも出来る。