中2数学C 2019年度2学期 本問解答
§7 面対称性と平面への垂線

※ 欠席してしまった場合は、問 7.1, 問 7.3 を（余裕があれば問 7.4 も）自分で確認し、p.14～p.15 の宿題 H7.1～H7.3 に取り組んで提出してください。

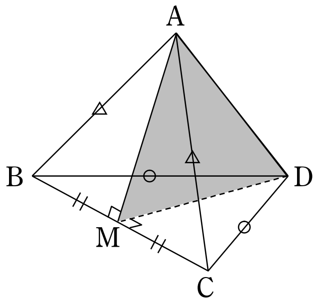
問7.1

(1) AB=AC, DB=DC より、(直感的には) この四面体は面対称である。その対称面が α であり、この面と BC の交点 P は、

$\boxed{\text{BC の中点 M}}$

である予想される

(2)



△ABC は AB=AC の二等辺三角形だから、中線 AM は A から BC への垂線と一致し、

AM ⊥ BC ………………………………… ①

同様に、DB=DC から、

DM ⊥ BC ………………………………… ②

AM, DM は平面 AMD 内にあって平行でないから、①, ②より

平面AMD ⊥ BC ………………………… ③

が示された。

（注: ③と △AMD ⊥ BC は同じことである。）

(3) 平面 AMD 内で A から DM に下ろした垂線の足を H とする：

AH ⊥ DM ………………………………… ④

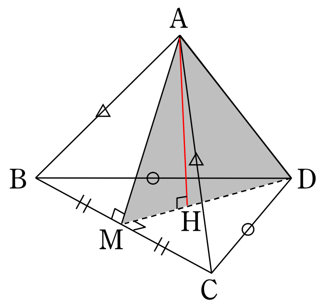
AH は平面 AMD 内にあるから、③より、

AH ⊥ BC ………………………………… ⑤

DM, BC は平面 BCD 内にあって平行でないから、④, ⑤より

AH ⊥ 平面BCD

つまり、平面 AMD 内で A から DM に下ろした垂線が、A から平面 BCD に下ろした垂線であり、(1)の予想が正しいことが分かった。（h = AH である。）



△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{34-9}=5$$

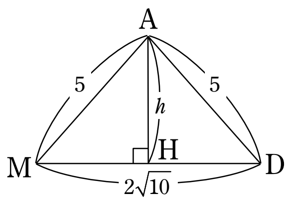
△DBM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{DM}=\sqrt{\mathrm{DB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{49-9}=2\sqrt{10}$$

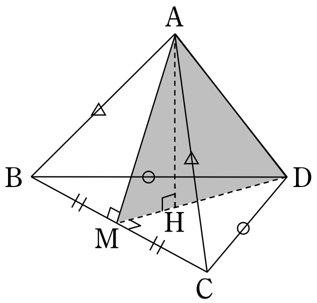
△ADM は AM = AD = 5 の二等辺三角形なので、垂線 AH は A から DM への中線と一致する。△ADH にピタゴラスの定理を用いて、

$$h=\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{DH}^2}$$

$$=\sqrt{25-10}=\boxed{\sqrt{15}}$$



問7.2



BC の中点を M とすると、

　AB=AC より AM$\perp$BC、

　DB=DC より DM$\perp$BC

だから、AM$\not\parallel$DM (AM と DM は平行でない)にも注意して、

　平面 AMD$\perp$BC ………………………………… ①

平面 AMD 内で A から DM に下ろした垂線の足を H とする:

　AH$\perp$DM ………………………………………… ②

AH は平面 AMD 内にあるから、①より、

　AH$\perp$BC ………………………………………… ③

②, ③より、DM$\not\parallel$BC にも注意して、

　AH$\perp$平面BCD

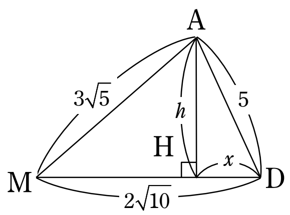
であり、△BCD を底面と見ると、AH がこの四面体の高さとなる。

△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{54-9}=3\sqrt{5}$$

△DBM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{DM}=\sqrt{\mathrm{DB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{49-9}=2\sqrt{10}$$



$\mathrm{AH}=h, \mathrm{DH}=x$ とおく。△ADH にピタゴラスの定理を用いて、

$x^2+h^2=25$ ………………………………………… ④

△AMH にピタゴラスの定理を用いて、

$(2\sqrt{10}-x)^2+h^2=45$ ……………………………… ⑤

④－⑤ より、

$$x^2-\left(2\sqrt{10}-x\right)^2=25-45$$

$$\cancel{x^2}-\left(40-4\sqrt{10}x+\cancel{x^2}\right)=-20$$

$$4\sqrt{10}x=-20+40$$

$$\therefore x=\frac{20}{4\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

④に代入して、

$$h^2=25-\frac{10}{4}=\frac{90}{4} \qquad \therefore h=\frac{3\sqrt{10}}{2}\ (>0)$$

である。

底面 BCD の面積 S は、

$$S=\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{DM}=\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{10}=6\sqrt{10}$$

だから、求める四面体 ABCD の体積は、

$$\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{\cancel{3}}\times\cancel{6}\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{\cancel{2}}=\boxed{30}$$

問7.3

BC, DE の中点をそれぞれ M, N とおくと、（直感的に）この四角錐は平面 AMN に関して対称であり、A から底面 BCDE へ下ろした垂線の足は MN 上にあるはずである。まずこれを示そう。

BC, DE の中点をそれぞれ M, N とおく。
△ABC は AB=AC の二等辺三角形だから、中線 AM は A から BC への垂線と一致し、

$BC \perp AM$ ……………………………… ①

BCDE は長方形だから、

$BC \perp MN$ ……………………………… ②

①, ②より、AM∦MN にも注意して、

$BC \perp$ 平面AMN ……………………… ③

である。平面 AMN 内で A から MN に下ろした垂線の足を H とする：

$MN \perp AH$ ……………………………… ④

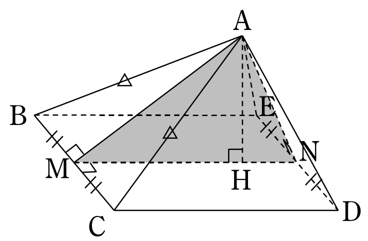
AH は平面 AMN 内にあるから、③より、

$BC \perp AH$ ……………………………… ⑤

④, ⑤より、MN∥BC にも注意して、

平面BCDE $\perp AH$ …………………… ⑥

であり、底面 BCDE に対し、AH がこの四角錐の高さである。



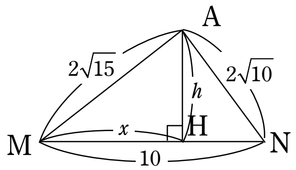
※　⑥を示すのに AD=AE を使っていないことに着目！（③から DE ⊥ 平面AMN と分かるので、AD=AE は仮定せずとも、これから示せる。）

△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{69 - 9} = 2\sqrt{15}$$

AD=AE より DE ⊥ AN だから、△ADN にピタゴラスの定理を用いて、

$$AN = \sqrt{AD^2 - DN^2} = \sqrt{49 - 9} = 2\sqrt{10}$$



$AH = h, MH = x$ とおく。△AMH にピタゴラスの定理を用いて、

$x^2 + h^2 = 60$ ……………………………… ⑦

△ANH にピタゴラスの定理を用いて、

$(10 - x)^2 + h^2 = 40$ ……………………… ⑧

⑦ − ⑧ より、

$$x^2 - (10 - x)^2 = 60 - 40$$

$$\cancel{x^2} - (100 - 20x + \cancel{x^2}) = 20$$

$$20x = 20 + 100$$

$$x = \frac{120}{20} = 6$$

⑦に代入して、

$$h^2 = 60 - 36 = 24 \qquad \therefore h = 2\sqrt{6} \ (> 0)$$

である。底面 BCDE の面積 S は、

$$S = BC \times CD = 6 \times 10 = 60$$

だから、求める A-BCDE の体積は、

$$\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{\cancel{3}} \times \overset{20}{\cancel{60}} \times 2\sqrt{6} = \boxed{40\sqrt{6}}$$

※　実は、ピタゴラスの定理の逆より、∠MAN=90° が示せる。これに気付けば、△AMN の面積あるいは△AMN∽△HAN に着目して、次のように h を求められる。

$$\frac{1}{2} \times MN \times AH = \frac{1}{2} \times AM \times AN$$

$$\therefore h = AH = \frac{AM \times AN}{MN} = \frac{4\sqrt{150}}{10} = 2\sqrt{6}$$

問7.4

AB, CD の中点をそれぞれ M, N とおく。

△OAB は OA=OB の二等辺三角形だから、中線 OM は O から AB への垂線と一致し、

$AB \perp OM$ ……………………………… ①

ABCD は AB // DC の等脚台形だから、

$AB \perp MN$ ……………………………… ②

①, ②より、OM∦MN にも注意して、

$AB \perp$ 平面OMN ……………………… ③

である。平面 OMN 内で O から MN に下ろした垂線の足を H とする：

$MN \perp OH$ ……………………………… ④

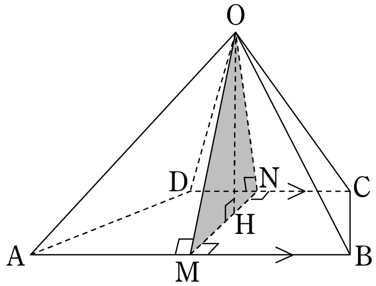
OH は平面 OMN 内にあるから、③より、

$AB \perp OH$ ……………………………… ⑤

④, ⑤より、MN∦AB にも注意して、

平面$ABCD \perp OH$ ……………………… ⑥

であり、底面 ABCD に対し OH がこの四角錐の高さである。

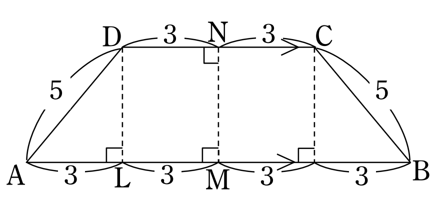


△OAM にピタゴラスの定理を用いて、

$$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{100-36}=8$$

OC=OD より CD⊥ON だから、△OCN にピタゴラスの定理を用いて、

$$ON=\sqrt{OC^2-CN^2}=\sqrt{81-9}=6\sqrt{2}$$

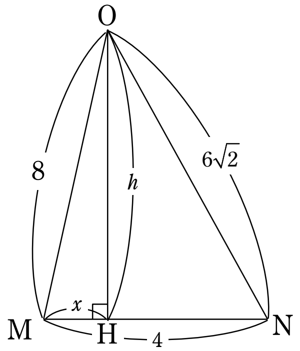


次に MN を求めよう。底面 ABCD において、D から AB へ下ろした垂線の足を L とすると、

$$AL=\frac{AB-CD}{2}=\frac{12-6}{2}=3$$

だから、△ADL にピタゴラスの定理を用いて、

$$MN=LD=\sqrt{AD^2-AL^2}=\sqrt{25-9}=4$$



$OH=h, MH=x$ とおく。△OMH にピタゴラスの定理を用いて、

$x^2+h^2=64$ ……………………………… ⑦

△ONH にピタゴラスの定理を用いて、

$(4-x)^2+h^2=72$ ……………………… ⑧

⑦−⑧ より、

$$x^2-(4-x)^2=64-72$$
$$\cancel{x^2}-(16-8x+\cancel{x^2})=-8$$
$$8x=-8+16$$
$$x=\frac{8}{8}=1$$

⑦に代入して、

$$h=\sqrt{64-1}=3\sqrt{7}$$

である。底面 ABCD の面積 S は、

$$S=\frac{AB+CD}{2}\times MN=\frac{12+6}{2}\times 4=36$$

だから、求める O-ABCD の体積は、

$$\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{\cancel{3}}\times\overset{12}{\cancel{36}}\times 3\sqrt{7}=\boxed{36\sqrt{7}}$$