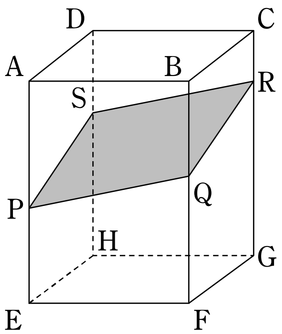
中2数学B 2019年度2学期　本問解答
§8　立体の切断

※　欠席してしまった場合は、問 8.1～問 8.3 を（余裕があれば問 8.4 も）自分で確認し、p.22～p.23 の宿題 H8.1～H8.3 に取り組んで提出してください。

問8.1



面 ABFE と DCGH は平行な平面なので交わらない。よって、面 ABFE に含まれる直線 PQ と面 DHGC に含まれる直線 SR も交わらない。この 2 直線は同一平面（切断面）上にあるので、交わらないということは平行である。

　　PQ // SR

同様に、面 AEHD と BFGC が平行な平面であることから、

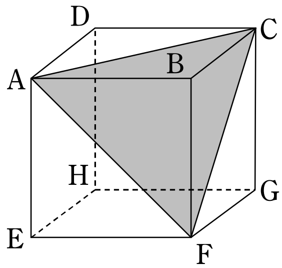
　　PS // QR

したがって、PQRS は平行四辺形である。

※　この事実は、今後証明せずに利用すること にする。

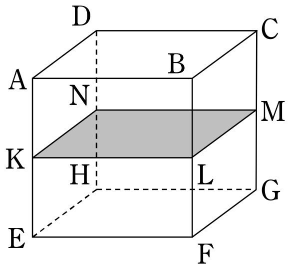
問8.2

(i)　△ACF は正三角形である。



［理由］三辺が等しいから。

(ii)　AE, BF, CG, DH の中点を K, L, M, N とすると、KLMN は正方形である。



［理由］

直感的には「当たり前」であるが、証明しておく。

四角形 AKLB は長方形になるので、

　AB // KL ……………………………………… ①

　AB = KL ……………………………………… ②

①と同様に、

　DC // NM ……………………………………… ③

なので、①, ③, AB // DC より

　KL // NM

とわかる。したがって、

　K, L, M, N は同一平面上にある。……④

②と同様に、

　LM = BC, MN = CD, NK = DA

であるから、 AB = BC = CD = DA より

KL = LM = MN = NK

よって、④と合わせて、

KLMN はひし形…………………………………… ⑤

である。

さらに、 AB ⊥ 面 BFGC なので、これと①より

KL ⊥ 面 BFGC

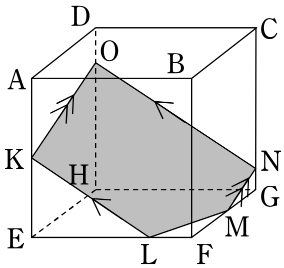
∴ ∠KLM = 90° …………………………………… ⑥

⑤, ⑥より、KLMN は一つの内角が 90° のひし形なので正方形である。

(iii) 正五角形が切り口に現れることはない。

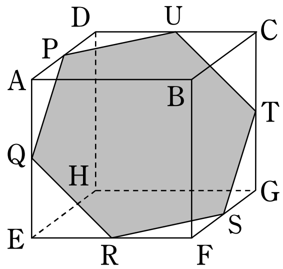
［理由］

切り口に現れる多角形の辺は、立方体の面と、切断する平面との交わりである。立方体は、向かい合う 3 組の面が平行であるような 6 面からなるので、このうちの 5 つの面を選ぶと、2 組の平行な平面が含まれる。したがって、切り口に現れる五角形には、2 組の平行な辺がある。



一方、正五角形の辺は、どの二つも平行ではないので、これが切り口に現れることはない。

(iv) DA, AE, EF, FG, GC, CD の中点を P, Q, R, S, T, U とすると、六角形 PQRSTU は正六角形である。



［理由］

長くなるので、細部は省略する。

P, Q, R, S, T, U が同一平面上にあること

(1) PQ // DE // UR なので、P, Q, U, R は同一平面上にある。

(2) QR // AF // PS なので、Q, R, S, P は同一平面上にある。

(3) RS // EG // QT なので、R, S, T, Q は同一平面上にある。

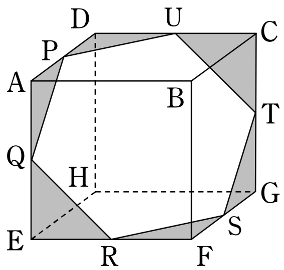
(1), (2)より、平面 PQR は U と S を含み、P, Q, R, U, S は同一平面上にあることが分かり、(3)よりこの平面は T も含む。よって、P, Q, R, S, T, U は同一平面上にある。

あとは、この六角形 PQRSTU が正六角形であること、つまり、すべての辺の長さが等しく、すべての内角の大きさが等しいことを確認しよう。

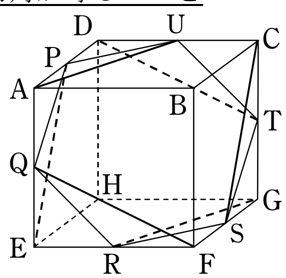
すべての辺が等しいこと

△APQ, △EQR, △FRS, △GST, △CTU および△DUP は二辺夾角相等で合同な三角形と分かるので、対応辺を考えて

PQ = QR = RS = ST = TU = UP …………… ①



すべての内角が等しいこと



△PAE, △QEF, △RFG, △SGC, △TCD および△UDA は二辺夾角相等で合同な三角形と

分かるので、対応辺を考えて、

$PE = QF = RG = SC = TD = UA$

このことと

$ER = FS = GT = CU = DP = AQ$

$\angle PER = \angle QFS = \angle RGT$

$= \angle SCU = \angle TDP = \angle UAQ = 90°$

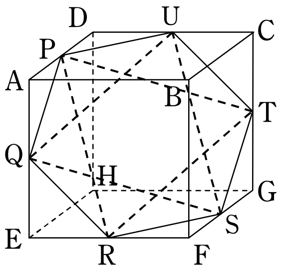
より、二辺夾角相等で△PER, △QFS, △RGT, △SCU, △TDP および△UAQ は合同で、対応辺を考えて、

$PR = QS = RT = SU = TP = UQ$ ………… ②

①,②から、△PQR, △QRS, △RST, △STU, △TUP および△UPQ は三辺相等で合同となり、対応角を考えて、

$\angle PQR = \angle QRS = \angle RST$

$= \angle STU = \angle TUP = \angle UPQ$



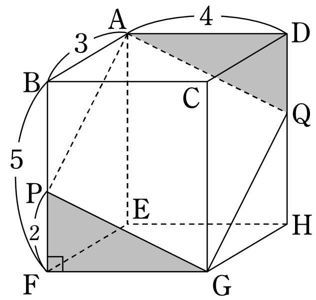
以上より、PQRSTU は正六角形である。

(v) 正七角形が切り口に現れることはない。

［理由］

切り口に現れる多角形の辺は、立方体の面と、切断する平面との交わりである。立方体は、6 面しかないので、切り口の多角形には最大でも 6 つの辺しかない。したがって、そもそも七角形の切り口が現れることはない。

問8.3



DQ の長さ

△ADQ と△GFP において、

$AD = GF$ ……………………………………… ①

APGQ は平行四辺形なので

$AQ = GP$ ……………………………………… ②

また

$\angle ADQ = \angle GFP = 90°$ ………………………… ③

①, ②, ③より、斜辺一辺相等で

$\triangle ADQ \equiv \triangle GFP$

よって、対応辺を考えて、

$DQ = FP = 2$

(1) 周の長さ

APGQ は平行四辺形なので、向かい合う辺の長さは等しく、周の長さは

$AP + PG + GQ + QA = 2(AP + PG)$

として計算できる。

△ABP は直角二等辺三角形であるから、

$AP = \sqrt{2}AB = 3\sqrt{2}$

△PFG にピタゴラスの定理を用いて、

$PG = \sqrt{PF^2 + FG^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

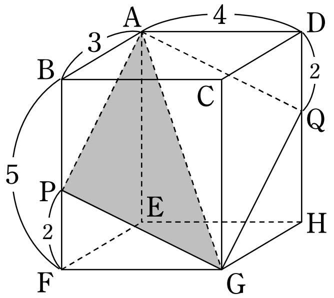
よって、周の長さは

$2(AP + PG)$

$= 2\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\right) = \boxed{6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}}$

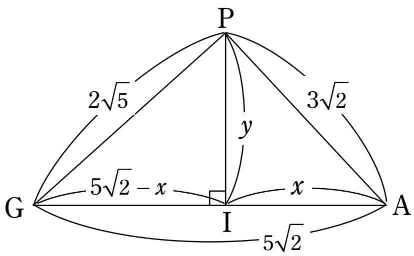
面積

APGQ は平行四辺形なので、その面積は△APG の 2 倍である。△APG について、AP , PG の長さは分かっているので、残りの一辺である AG の長さが分かれば、例えば P から AG へ下ろした垂線の長さが計算できる。



AG は直方体 ABCD-EFGH の対角線だから、問 6.1 と同様に計算できる。
AE ⊥ 面 EFGH より、∠AEG = 90° だから、△AEG にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{AG}=\sqrt{\mathrm{AE}^2+\mathrm{EG}^2}$$
$$=\sqrt{\mathrm{AE}^2+(\mathrm{EF}^2+\mathrm{FG}^2)}$$
(△EFGにピタゴラスの定理)
$$=\sqrt{5^2+3^2+4^2}=5\sqrt{2}$$



P から AG へ下ろした垂線の足を I とし、$\mathrm{AI}=x, \mathrm{PI}=y$ とおく。
△API にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2+y^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2 \quad \cdots\cdots ④$$

△GPI にピタゴラスの定理を用いて、

$$\left(5\sqrt{2}-x\right)^2+y^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2 \quad \cdots\cdots ⑤$$

④ − ⑤ より

$$x^2-\left(5\sqrt{2}-x\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2$$
$$x^2-\left(50-10\sqrt{2}x+x^2\right)=18-20$$
$$x^2-50+10\sqrt{2}x-x^2=-2$$
$$10\sqrt{2}x=48$$
$$x=\frac{\overset{24}{\cancel{48}}}{{}_{5}\cancel{10}\sqrt{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{5}$$

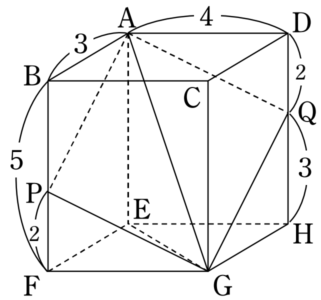
④に代入して

$$y^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)^2$$
$$=18-\frac{288}{25}=\frac{162}{25}$$
$$\therefore\ y=\frac{9\sqrt{2}}{5}\ (>0)$$

したがって、APGQ の面積は

$$2\triangle\mathrm{APG}=\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\mathrm{AG}\times\mathrm{PI}$$
$$=5\sqrt{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{5}=\boxed{18}$$

(2) 六面体 APGQ-EFGH を、2 つの四角錐 G-APFE と G-AQHE に分割して考える。



直方体の辺 GF が面 ABFE と垂直なことから、G-APFE の APFE を底面としたときの高さは GF であり、GH が面 AEHD と垂直なことから、G-AQHE の AQHE を底面としたときの高さは GH になっている。
よって、

[G-APFEの体積]

$$=\frac{1}{3}\times[\mathrm{APFE}の面積]\times\mathrm{GF}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(\mathrm{PF}+\mathrm{AE})\times\mathrm{FE}\right\}\times\mathrm{GF}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(2+5)\times3\right\}\times4=14$$

[G-AEHQの体積]

$=\dfrac{1}{3}\times[\text{AEHQの面積}]\times GH$

$=\dfrac{1}{3}\times\left\{\dfrac{1}{2}\times(AE+QH)\times EH\right\}\times GH$

$=\dfrac{1}{3}\times\left\{\dfrac{1}{2}\times(5+3)\times 4\right\}\times 3=16$

以上より、

[APGQ-EFGHの体積]

$=[\text{G-APFEの体積}]+[\text{G-AEHQの体積}]$

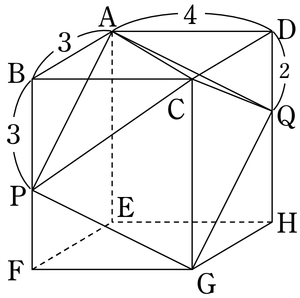
$=14+16=\boxed{30}$

※ APGQ-EFGH と GQAP-CDAB は鏡像の位置におくことができ、体積は等しい。このことに気付けば、その体積を、直方体 ABCD-EFGH の半分として

$\dfrac{3\times4\times5}{2}=30$

と計算できる。

(3) 求める垂線の長さは、四角錐 C-APGQ の、APGQ を底面としたときの高さである。四角錐 C-APGQ は六面体 GQAP-CDAB から、三角錐 C-ABP と C-ADQ を除いたものであることに注目しよう。



<u>GQAP-CDAB の体積</u>

GQAP-CDABは直方体ABCD-EFGHから(2)で体積を計算した APGQ-EFGH を除いたものなので、体積は

$3\times4\times5-30=30$

<u>C-ABP の体積</u>

△ABP を底面としたときの高さが CB なので、

$\dfrac{1}{3}\times\triangle ABP\times CB=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times3\right)\times4=6$

<u>C-ADQ の体積</u>

△ADQ を底面としたときの高さが CD なので、

$\dfrac{1}{3}\times\triangle ADQ\times CD=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\times2\right)\times3=4$

よって、C-APGQ の体積は

$30-6-4=20$

C から平面 APGQ へ下ろした垂線の長さを h とおくと、C-APGQ の体積に注目して

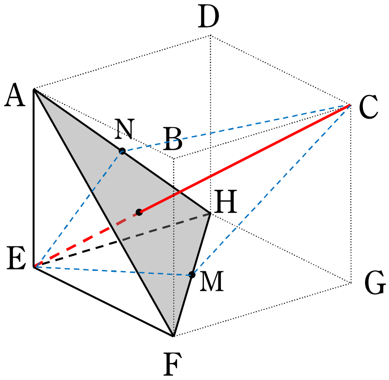
$\dfrac{1}{3}\times[\text{APGQの面積}]\times h=20$

なので、(1)より

$\dfrac{1}{3}\times18\times h=20\quad \therefore h=\boxed{\dfrac{10}{3}}$

問8.4

(1)



FH, AH の中点をそれぞれ M, N とする。
△EFH において、

EF＝EH, FM＝HM より、EM⊥FH

△CFH において、

CF＝CH, FM＝HM より、CM⊥FH

したがって、EM∦CM にも注意して、

面 ECM⊥FH

だから、

EC⊥FH…………………………………… ①

同様に、面 ECN⊥AH で、

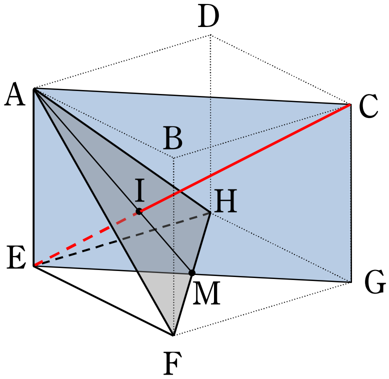
EC⊥AH…………………………………… ②

が分かる。①, ②より、FH∦AH にも注意して、

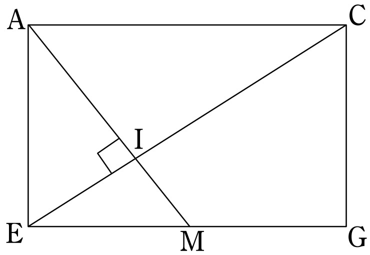
EC⊥面 AFH……………………………… ③

が示された。

(2)



EC と面 AFH の交点を I とする。(1)より、$h = \mathrm{EI}$ である。
面 ECM による断面を考えよう。AE, CG は、ともに面 ABCD に垂直だから AE // CG であり、A, E, G, C が同一平面上にある。また、EFGH は正方形だから M は EG の中点でもあり、面 ECM は面 AEGC と一致することに注意する。



AE // CG に加え、AE＝CG, AE⊥AC であるから、AEGC は長方形である。ゆえに、

AC // EG

であり、平行線と比の定理より、

$$\begin{aligned} \mathrm{EI} : \mathrm{IC} &= \mathrm{EM} : \mathrm{AC} \\ &= \mathrm{EM} : \mathrm{EG} \\ &= 1 : 2 \end{aligned}$$

したがって、$h = \mathrm{EI}$ は EC の $\boxed{\frac{1}{3}\text{倍}}$ である。

※ EC⊥FH だけ先に確認し、面 AEGC 内で CE⊥AM を確認（例えば△AEM∽△CAE から）することで、EC⊥面 AFH を示すことも出来る。