中2数学B 2019年度2学期　本問解答
§7　面対称性と平面への垂線

※　欠席してしまった場合は、問 7.1, 問 7.3 を自分で確認し、p.16～p.17 の宿題 H7.1～H7.3 に取り組んで提出してください。

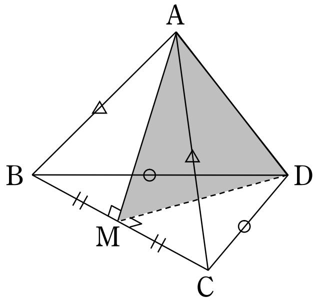
問7.1

(1)　AB=AC, DB=DC より、(直感的には) この四面体は面対称である。その対称面が α であり、この面と BC の交点 P は、

BC の中点 M

である予想される

(2)



△ABC は AB=AC の二等辺三角形だから、中線 AM は A から BC への垂線と一致し、

AM ⊥ BC ……………………………… ①

同様に、DB=DC から、

DM ⊥ BC ……………………………… ②

AM, DM は平面 AMD 内にあって平行でないから、①, ②より

平面AMD ⊥ BC ……………………… ③

が示された。

（注: ③と △AMD ⊥ BC は同じことである。）

(3)　平面 AMD 内で A から DM に下ろした垂線の足を H とする：

AH ⊥ DM ……………………………… ④

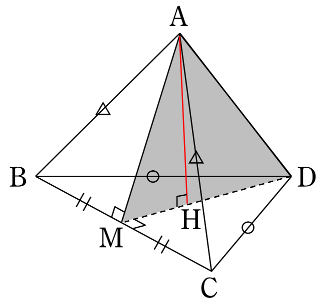
AH は平面 AMD 内にあるから、③より、

AH ⊥ BC ……………………………… ⑤

DM, BC は平面 BCD 内にあって平行でないから、④, ⑤より

AH ⊥ 平面BCD

つまり、平面 AMD 内で A から DM に下ろした垂線が、A から平面 BCD に下ろした垂線であり、(1)の予想が正しいことが分かった。（h = AH である。）



△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

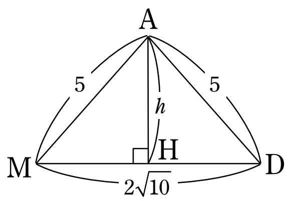
$$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{34-9}=5$$

△DBM にピタゴラスの定理を用いて、

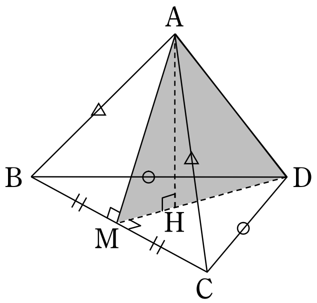
$$\mathrm{DM}=\sqrt{\mathrm{DB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{49-9}=2\sqrt{10}$$

△ADM　は AM = AD = 5 の二等辺三角形なので、垂線 AH は A から DM への中線と一致する。△ADH にピタゴラスの定理を用いて、

$$h=\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{DH}^2}$$
$$=\sqrt{25-10}=\boxed{\sqrt{15}}$$



問7.2



BC の中点を M とすると、
　AB=AC より AM ⊥ BC、
　DB=DC より DM ⊥ BC
だから、AM∦DM（AM と DM は平行でない）にも注意して、

　平面 AMD ⊥ BC ………………………………… ①

平面 AMD 内で A から DM に下ろした垂線の足を H とする:

　AH ⊥ DM ………………………………………… ②

AH は平面 AMD 内にあるから、①より、

　AH ⊥ BC ………………………………………… ③

②, ③より、DM∦BC にも注意して、

　AH ⊥ 平面BCD

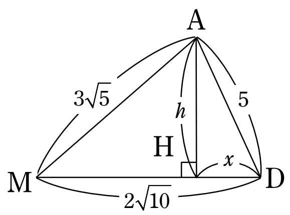
であり、△BCD を底面と見ると、AH がこの四面体の高さとなる。

△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{54-9}=3\sqrt{5}$$

△DBM にピタゴラスの定理を用いて、

$$\mathrm{DM}=\sqrt{\mathrm{DB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{49-9}=2\sqrt{10}$$



$\mathrm{AH}=h, \mathrm{DH}=x$ とおく。△ADH にピタゴラスの定理を用いて、

$$x^2+h^2=25 \quad \cdots\cdots ④$$

△AMH にピタゴラスの定理を用いて、

$$(2\sqrt{10}-x)^2+h^2=45 \quad \cdots\cdots ⑤$$

④－⑤より、

$$x^2-\left(2\sqrt{10}-x\right)^2=25-45$$

$$\cancel{x^2}-\left(40-4\sqrt{10}x+\cancel{x^2}\right)=-20$$

$$4\sqrt{10}x=-20+40$$

$$\therefore x=\frac{20}{4\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

④に代入して、

$$h^2=25-\frac{10}{4}=\frac{90}{4} \qquad \therefore h=\frac{3\sqrt{10}}{2}\ (>0)$$

である。

底面 BCD の面積 S は、

$$S=\frac{1}{2}\times \mathrm{BC}\times \mathrm{DM}=\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{10}=6\sqrt{10}$$

だから、求める四面体 ABCD の体積は、

$$\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{\cancel{3}}\times\cancel{6}\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{\cancel{2}}=\boxed{30}$$

問7.3

BC, DE の中点をそれぞれ M, N とおくと、(直感的に) この四角錐は平面 AMN に関して対称であり、A から底面 BCDE へ下ろした垂線の足は MN 上にあるはずである。まずこれを示そう。

BC, DE の中点をそれぞれ M, N とおく。
△ABC は AB=AC の二等辺三角形だから、中線 AM は A から BC への垂線と一致し、

$BC \perp AM$ ……………………………… ①

BCDE は長方形だから、

$BC \perp MN$ ……………………………… ②

①, ②より、AM∦MN にも注意して、

$BC \perp$ 平面AMN ……………………… ③

である。平面 AMN 内で A から MN に下ろした垂線の足を H とする：

$MN \perp AH$ ……………………………… ④

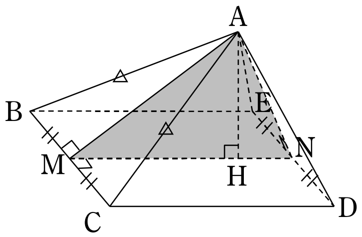
AH は平面 AMN 内にあるから、③より、

$BC \perp AH$ ……………………………… ⑤

④, ⑤より、MN∦BC にも注意して、

平面BCDE $\perp AH$ ……………………… ⑥

であり、底面 BCDE に対し、AH がこの四角錐の高さである。



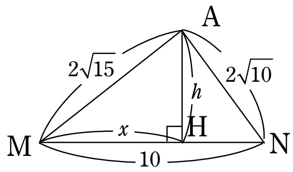
※　⑥を示すのに AD=AE を使っていないことに着目！ (③から DE ⊥ 平面AMN と分かるので、AD=AE は仮定せずとも、これから示せる。)

△ABM にピタゴラスの定理を用いて、

$$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{69-9}=2\sqrt{15}$$

AD=AE より DE ⊥ AN だから、△ADN にピタゴラスの定理を用いて、

$$AN=\sqrt{AD^2-DN^2}=\sqrt{49-9}=2\sqrt{10}$$



$AH=h, MH=x$ とおく。△AMH にピタゴラスの定理を用いて、

$x^2+h^2=60$ ……………………………… ⑦

△ANH にピタゴラスの定理を用いて、

$(10-x)^2+h^2=40$ ……………………… ⑧

⑦−⑧より、

$$x^2-(10-x)^2=60-40$$
$$\cancel{x^2}-(100-20x+\cancel{x^2})=20$$
$$20x=20+100$$
$$x=\frac{120}{20}=6$$

⑦に代入して、

$h^2=60-36=24 \quad \therefore h=2\sqrt{6}\ (>0)$

である。底面 BCDE の面積 S は、

$S=BC\times CD=6\times 10=60$

だから、求める A-BCDE の体積は、

$$\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{\cancel{3}}\times\overset{20}{\cancel{60}}\times 2\sqrt{6}=\boxed{40\sqrt{6}}$$

※　実は、ピタゴラスの定理の逆より、∠MAN=90° が示せる。これに気付けば、△AMN の面積あるいは△AMN∽△HAN に着目して、次のように h を求められる。

$$\frac{1}{2}\times MN\times AH=\frac{1}{2}\times AM\times AN$$

$$\therefore h=AH=\frac{AM\times AN}{MN}=\frac{4\sqrt{150}}{10}=2\sqrt{6}$$